DRUHÝ ROZKLAD LIN. TRANSFORMACE

f... lin. transf. , A... matice

charakteristický polynom ... χ_f, χ_A

rozepíšeme jako součin nerozložitelných polynomů

$q_1, \dots, q_k$ $\quad U_i = \mathrm{Ker}\, q_i(f) = \mathrm{Ker}\, q_i(A)$

nad polem $\mathbb{C}$ $q_i = (x - \xi_i)^{k_i}$

Pak $U_i = \mathrm{Ker}\,(f - \xi_i\, id)^{k_i} = \mathrm{Ker}\,(A - \xi_i E)^{k_i}$

označme $g = f - \xi_i\, id$

$$\left(g|_{U_i}\right)^{k_i} = 0$$

Def. $g: U \to U$ lin. tr. taková, že $\exists k \in \mathbb{N}$: $g^k = 0$, se nazývá NILPOTENTNÍ.

$T \subseteq U$ podprostor s bází $e_1, \dots, e_m$ takovou, že
$g(e_1) = e_2,\ g(e_2) = e_3, \dots, g(e_{m-1}) = e_m,\ g(e_m) = 0$.

- Pak T je invariantní vzhledem k g i $f = g + \xi\, id$.

$x \in T$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$

$$g(x) = x_1 g(e_1) + \dots + x_{m-1} g(e_{m-1}) + x_m g(e_m) = x_1 e_2 + \dots + x_{m-1} e_m \in T$$

- matice $g|_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}$

- matice $f|_T = \begin{pmatrix} \xi & 0 & & & 0 \\ 1 & \xi & \ddots & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & \xi \end{pmatrix}$

$f(e_1) = g(e_1) + \xi\, id(e_1) = e_2 + \xi e_1$

$f(e_2) = g(e_2) + \xi e_2 = e_3 + \xi e_2$

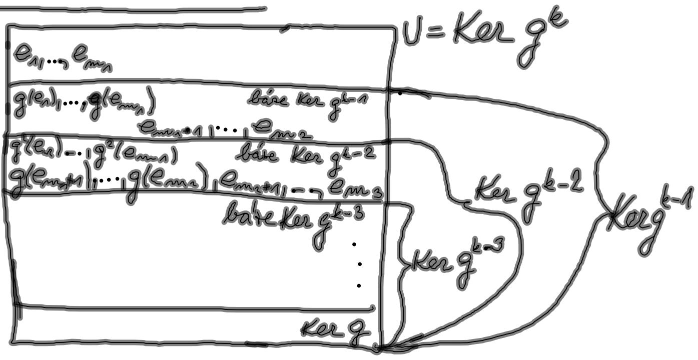
Podprostor $T \subseteq U$ s bází $e_1, \dots, e_m$ takovou, že $e_1 \xrightarrow{g} e_2 \xrightarrow{g} e_3 \xrightarrow{g} \dots \xrightarrow{g} e_m \xrightarrow{g} 0$, se nazývá CYKLICKÝ a báze $e_1, \dots, e_m$ se nazývá JORDANOVA.

matice $J_1(\xi) = (\xi)$, $J_2(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 1 & \xi \end{pmatrix}$

$J_3(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & \xi \end{pmatrix} \dots$ se nazývají JORDANOVY BLOKY.

<u>Tvrzení</u> Buď $g: U \to U$ nilpotentní transformace. Pak existují cyklické podprostory $T_1, \dots, T_r \subset U$ tak, že

$$U = T_1 \dotplus \dots \dotplus T_r .$$



Cyklické podprostory

$$[\![e_1, g(e_1), \dots, g^{k-1}(e_1)]\!]$$
$$\vdots$$
$$[\![e_{m_1}, g(e_{m_1}), \dots]\!]$$
$$[\![e_{m_1+1}, g(e_{m_1+1}), \dots]\!]$$
$$\vdots$$
$$[\![e_{m_2}, g(e_{m_2}), \dots]\!]$$
$$\vdots$$

<u>Důsledek</u> Buď $g: U \to U$ nilpotentní transf. Pak existuje báze prostoru U tak, že

a) transformace g má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků $J_s(0)$;

b) transf. $f = g + \xi\, id$ má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků $J_s(\xi)$.

<u>Definice</u> Matice, která je přímým součtem matic $J_r(\xi)$, se nazývá MATICE V JORDANOVĚ TVARU.

$A \dots Q^{-1} A Q$ není matice v Jordanově tvaru.

$$Q_2^{-1} \underbrace{Q_1^{-1} A\, Q_1}_{\text{blokově diagonální}} Q_2 \quad \text{matice v Jord. tvaru}$$

Příklad

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^4$$

kořen $\lambda = 1$

$$B = A - 1E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = O$$

$$\operatorname{Ker} B = [\![(-1,2,5,0),\ (-1,2,0,5)]\!]$$

$$e_1 = (0,0,1,0),\quad e_2 = (0,1,0,0)$$

$$Be_1 = (0,0,1,-1),\quad Be_2 = (1,-2,1,-6)$$

$[\![e_1, Be_1]\!]$, $[\![e_2, Be_2]\!]$ cyklické podpr.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \end{pmatrix},\quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}\cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$